

1. 直线

倾斜角 $\alpha \in [0, \pi)$

$$k = \tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

tan 图像

$$\begin{cases} y = kx + m \\ y - y_0 = k(x - x_0) \end{cases} \quad \text{竖直线不能用}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \Rightarrow \text{水平, 竖直线过原点不能用}$$

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \quad \Rightarrow \text{水平, 竖直线不能用}$$

$$ax + by + c = 0$$

反射式: $x = ty + m$ (用锥用得少) \Rightarrow 不包括水平

3. 直线平行

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

平行

$$\Leftrightarrow A_1B_2 = A_2B_1 \text{ 且 } A_1C_2 \neq A_2C_1 \text{ 或 } B_1C_2 \neq B_2C_1$$

限制重合

\Downarrow 垂直

和向量相似

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

4. 对称

$$\begin{matrix} (x_0, y_0) \\ \diagdown \\ Ax + By + C = 0 \\ \diagup \\ (x, y) \end{matrix}$$

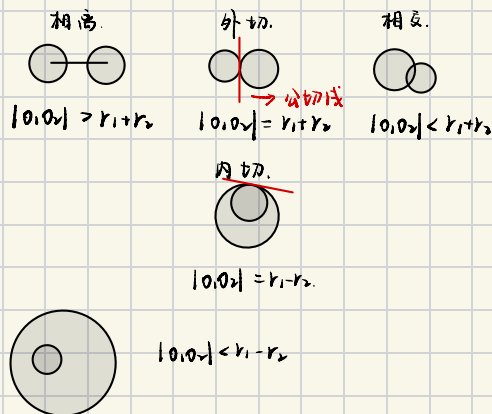
垂直
中点

$$\begin{aligned} \text{通用: } x &= x_0 - 2 \cdot A \cdot \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2} \\ &= y_0 - 2 \cdot B \cdot \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2} \end{aligned}$$

5. 平行线间距离公式

推导

6. 圆与圆位置关系



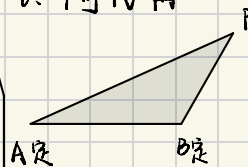
7. 过圆内定点的弦



最长弦: 直径

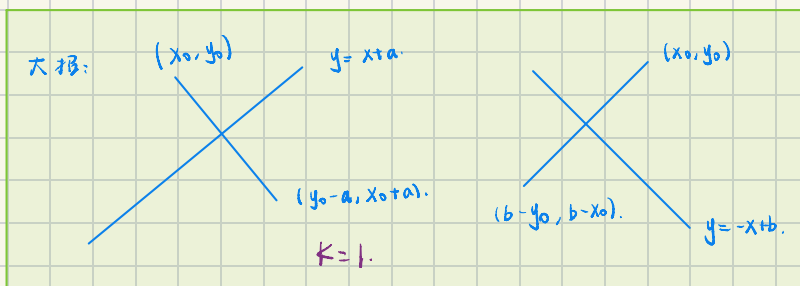
最短弦: 垂直于直径的弦

8. 阿氏圆

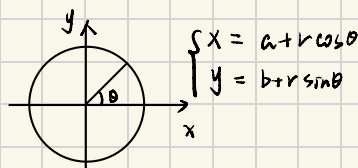


$$\frac{PA}{PB} = \lambda \neq 1$$

则 P 轨迹为圆



$$\begin{aligned} 10. \text{ 圆的参数方程} \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \\ \begin{matrix} x - a = r \cos \theta \\ y - b = r \sin \theta \end{matrix} \end{aligned}$$



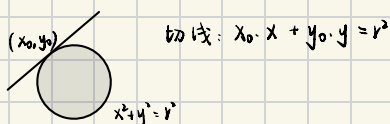
11. 极点极线

(x_0, y_0) 极点

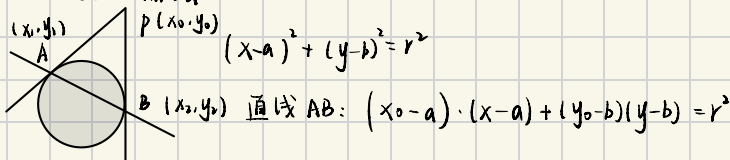
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = r^2 &\rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \\ x_0 \cdot x + y_0 \cdot y = r^2 &\quad (x_0-a)(x-a) + (y_0-b)(y-b) = r^2 \end{aligned}$$

若 (x_0, y_0) 在曲线上, 极线表示切线
若 (x_0, y_0) 在曲线外, 极线表示切点弦
若 (x_0, y_0) 在曲线内, 极线与曲线相离

12. 切线方程



13. 切点弦





第3讲:直线与圆题型拓展(1)

1. 下列说法正确的是 (BD) $a+a=0 \Rightarrow a=0$.

A. “ $a=-1$ ”是“直线 $x-ay+3=0$ 与直线 $ax-y+1=0$ 互相垂直”的充分必要条件 \times

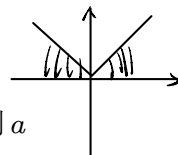
B. 直线 $x\cos\alpha - y + 3 = 0$ 的倾斜角 θ 的取值范围是 $[0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi)$ \checkmark $k = \cos\alpha \in [-1, 1]$

C. 若圆 $C_1: x^2+y^2-6x+4y+12=0$ 与圆 $C_2: x^2+y^2-14x-2y+a=0$ 有且只有一个公共点, 则 $a=34$ \times 外切或内切. 一定有两个解.

D. 若直线 $y=x+b$ 与曲线 $y=3-\sqrt{4x-x^2}$ 有公共点, 则实数 b 的取值范围是 $[1-2\sqrt{2}, 3]$ \checkmark .

C: 配方 $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 1 \Rightarrow (3, -2) \quad r=1$
 $(x-7)^2 + (y-1)^2 = 50-a \Rightarrow (7, 1) \quad r=\sqrt{50-a}$
 $\therefore \sqrt{16+a} = 5 \pm 1 \Rightarrow \sqrt{50-a} = 1$
 $\therefore 50-a=1 \Rightarrow a=49$
 $\therefore 50-a=16 \Rightarrow a=34$

D: 半圆 $(y-3)^2 = 4x-x^2$
 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$
 $x-y+b=0 \Rightarrow \frac{|2-3+b|}{\sqrt{2}} = r=2$
 $\Rightarrow b=1+\sqrt{2}$ 或 $1-\sqrt{2}$



2. (2013·湖南) 在等腰直角三角形 ABC 中, $AB=AC=4$, 点 P 是边上异于 AB 的一点, 光线从点 P 出发, 经 BC, CA 反射后又回到点 P (如图), 若光线 QR 经过 $\triangle ABC$ 的重心, 则 AP 等于 (D.)

A. 2

对称

B. 1

C. $\frac{8}{3}$

D. $\frac{4}{3}$

求重心: $\vec{AO} = \frac{1}{3}(\vec{AC} + \vec{AB})$

$\vec{O}(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$

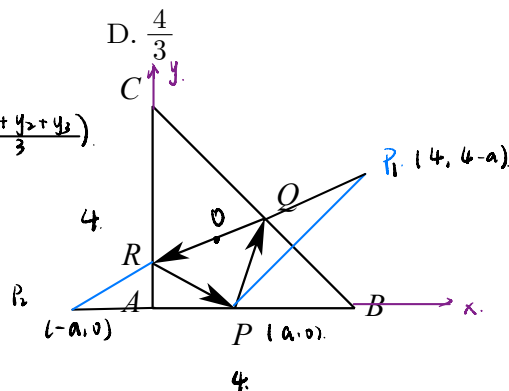
$O(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$

$k_{P_1P_2} = k_{P_2O}$

$\frac{4-a}{4+a} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}+a} = \frac{4}{4+3a}$

$16+4a = (4-a)(4+3a)$

$a = \frac{4}{3}$



3. 已知两条直线 $l_1: (\lambda+2)x + (1-\lambda)y + 2\lambda - 5 = 0$, $l_2: (k+1)x + (1-2k)y + k - 5 = 0$, 且 $l_1 \parallel l_2$, 当两平行线距离最大时, $\lambda+k =$ (C)

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

考小题: 令 $\lambda = -2$, $3y = 9 \Rightarrow y = 3$

令 $\lambda = 1$, $3x = 3 \Rightarrow x = 1$

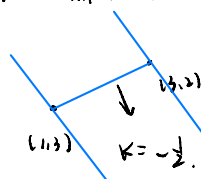
$\Rightarrow l_1$ 过定点 $(1, 3)$

同理 l_2 过定点 $(3, 2)$

考大题: 展开

$(\lambda+2)x + (1-\lambda)y + 2\lambda - 5 = 0$

$\begin{cases} 2x+y-5=0 \\ x-y+2=0 \end{cases}$



距离最大: 连线垂直

l_1, l_2 斜率 $= 2$

$\frac{\lambda+2}{\lambda-1} = \frac{k+1}{2k-1} = 2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 4 \\ k = 1 \end{cases}$



4. 在平面直角坐标系 xOy (O 为坐标原点) 中, 不过原点的两直线 $l_1: x - my + 2m - 1 = 0$ 、 $l_2: mx + y - m - 2 = 0$ 的交点为 P , 过点 O 分别向直线 l_1 、 l_2 引垂线, 垂足分别为 M 、 N , 则四边形 $OMPN$ 的面积的最大值为 (D)

过定点

A. 3

B. $\frac{3}{2}$

C. 5

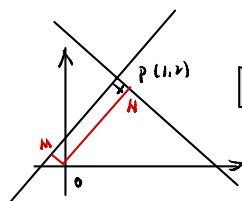
D. $\frac{5}{2}$

$$l_1: x - 1 - m(y - 2) = 0$$

$$l_1: (1, 2)$$

$$l_2: m(x - 1) + y - 2 = 0$$

$$l_2: (1, 2)$$



$$S = OM \cdot ON$$

$$OM^2 + ON^2 = OP^2 = 5 \geq 2OM \cdot ON$$

垂直

$$1 \cdot m + 1 \cdot (-m) = 0$$

$$\therefore l_1 \perp l_2$$

5. 设动直线 $l: mx - y - 2m + 3 = 0$ ($m \in \mathbb{R}$) 交圆 $C: (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 12$ 于 A 、 B 两点 (点 C 为圆心), 则下列说法正确的有 (AD)

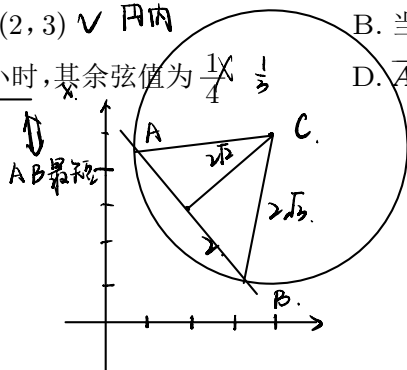
A. 直线 l 过定点 $(2, 3)$ ✓ 圆内B. 当 $|AB|$ 取得最小值时, $m = 1$ ✓C. 当 $\angle ACB$ 最小时, 其余弦值为 $\frac{1}{4}$ ✓D. $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ 的最大值为 24 ✓ 投影

$$2\sqrt{3} \times 4\sqrt{3} = 24$$

$$l: m(x - 2) - y + 3 = 0$$

$$(2, 3)$$

$$\frac{12 + 12 - 16}{24} = \frac{1}{3}$$



6. 已知直线 $l_1: kx + y - 2k + 3 = 0$, $l_2: x - ky + 3k - 4 = 0$, 设两直线分别过定点 A 、 B , 直线 l_1 和直线 l_2 的交点为 P , 则下列结论正确的是 (AB)

A. 直线 l_1 过定点 $A(2, -3)$, 直线 l_2 过定点 $B(4, 3)$ ✓B. $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 0$ ✓C. $\triangle PAB$ 面积的最大值为 5 $\frac{1}{2}|\vec{PA}| |\vec{PB}|$ $PA^2 + PB^2 = AB^2 = 40 \Rightarrow 2|\vec{PA}| |\vec{PB}|$ D. 若 $C(-1, 0)$, $D(1, 0)$, 则 P 恒满足 $|\vec{PD}| = \sqrt{2}|\vec{PC}|$ $|\vec{PA}| \cdot |\vec{PB}| \leq 20$

$$l_1: k(x - 2) + y + 3 = 0$$

$$A(2, -3)$$

$$k - k = 0$$

$$\therefore l_1 \perp l_2$$

$$l_2: x - 4 - k(y - 3) = 0$$

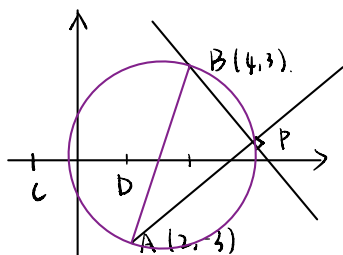
$$B(4, 3)$$

$$D: \text{设 } P(x, y)$$

$$(x - 1)^2 + y^2 = 2[(x + 1)^2 + y^2]$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 6x + 1 = 0$$

$$(x + 3)^2 + y^2 = 8$$





阿氏圆

7. 古希腊著名数学家阿波罗尼斯与欧几里得、阿基米德齐名. 他发现:“平面内到两个定点 A, B 的距离之比为定值 $\lambda (\lambda \neq 1)$ 的点的轨迹是圆”. 后来, 人们将这个圆以他的名字命名, 称为阿波罗尼斯圆, 简称阿氏圆. 在平面直角坐标系 xOy 中, $A(-2, 0), B(4, 0)$, 点 P 满足 $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{1}{2}$. 设点 P 的轨迹为 C , 下列结论正确的是 (BC)

A. C 的方程为 $(x+4)^2 + y^2 = 9$ X

B. 在 x 轴上存在异于 A, B 的两定点 D, E , 使得 $\frac{|PD|}{|PE|} = \frac{1}{2}$ ✓ 与 A, B 对称

C. 当 A, B, P 三点不共线时, 射线 PO 是 $\angle APB$ 的平分线 ✓ 角平分线定理

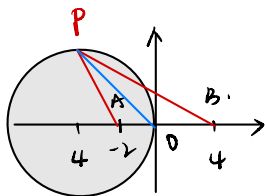
D. 在 C 上存在点 M , 使得 $|MO| = 2|MA|$ X

$$PB = 2PA \quad P(x, y)$$

$$(x-4)^2 + y^2 = 4[(x+2)^2 + y^2]$$

$$3x^2 + 3y^2 + 24x = 0$$

$$(x+4)^2 + y^2 = 16$$



D: 设 $M(x, y)$

$$x^2 + y^2 = 4[(x+2)^2 + y^2]$$

$$3x^2 + 3y^2 + 16x + 16 = 0$$

联立 $\Rightarrow x = -2, y = 0$ 无解 ($y^2 < 0$). \therefore 不存在.

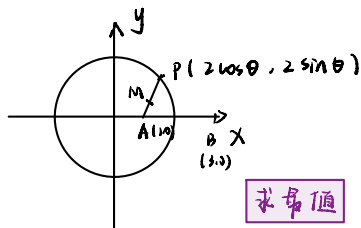
8. 设 O 为坐标原点, P 是圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上任意一点, $A(1, 0)$, M 是线段 PA 上的点, 且 $|PM| = 2|MA|$, $B(3, 0)$, 则直线 BM 的斜率的最大值为 (C)

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{2\sqrt{15}}{15}$

C. $\frac{2\sqrt{5}}{15}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$



$$\vec{PM} = \frac{2}{3}\vec{PA}$$

$$(x_M - 2\cos\theta, y_M - 2\sin\theta) = \frac{2}{3}(1 - 2\cos\theta, -2\sin\theta)$$

$$\Rightarrow y_M = 2\sin\theta - \frac{4}{3}\sin\theta = \frac{2}{3}\sin\theta$$

求最值

$$k_{BM} = \frac{\sin\theta - 0}{\cos\theta - \frac{1}{3}} \Rightarrow (\cos\theta, \sin\theta) \left(\frac{1}{3}, 0\right) = \frac{2}{15} \sqrt{5}$$

9. 已知直线 $l: ax + by - r^2 = 0$ 与圆 $C: x^2 + y^2 = r^2$, 点 $A(a, b)$, 则下列说法正确的是 (ABD)

A. 若点 A 在圆 C 上, 则直线 l 与圆 C 相切

B. 若点 A 在圆 C 内, 则直线 l 与圆 C 相离

C. 若点 A 在圆 C 外, 则直线 l 与圆 C 相离

D. 若点 A 在直线 l 上, 则直线 l 与圆 C 相切

极点极线

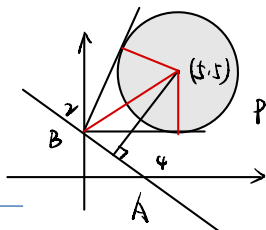
10. (2021·新高考 I) 已知点 P 在圆 $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 16$ 上, 点 $A(4, 0), B(0, 2)$, 则 ()

A. 点 P 到直线 AB 的距离小于 10 ✓

X B. 点 P 到直线 AB 的距离大于 2

C. 当 $\angle PBA$ 最小时, $|PB| = 3\sqrt{2}$

D. 当 $\angle PBA$ 最大时, $|PB| = 3\sqrt{2}$



$$l_{AB}: \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow x + 2y - 4 = 0$$

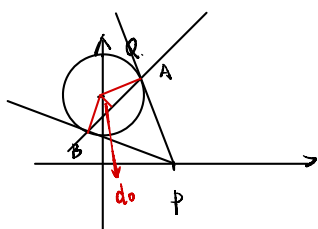
$$d = \frac{5 + 10 - 4}{\sqrt{5}} = \frac{11}{\sqrt{5}}$$

$$d' = \frac{11}{\sqrt{5}} + 4 < 10$$



11. (多选) 已知圆 C 的方程为 $x^2 + (y-2)^2 = 1$, 点 $Q(0, 3)$, 点 P 是 x 轴上的一个动点, 过点 P 作圆 C 的两条切线, 切点分别为 A, B , 则 ()

- A. 存在切点 A, B 使得 $\angle AQB$ 为直角 \times B. 直线 AB 过定点 $(0, \frac{3}{2})$ \checkmark
C. $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB}$ 的取值范围是 $[0, \frac{3}{2}]$ \times D. $\triangle QAB$ 面积的取值范围是 $(0, \frac{3}{4}\sqrt{3}]$



$$P(m, 0)$$

$$m \cdot x + (-2)(y-2) = 1$$

$$mx - 2y + 3 = 0$$

$$y = \frac{m}{2}x + \frac{3}{2}$$

D: $Q(0, 3)$ 到 AB 距离. $d_0 = \frac{1}{\sqrt{m^2+4}}$

$$d = \frac{3}{\sqrt{m^2+4}}$$

$$S_{\triangle QAB} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \sqrt{\frac{m^2+3}{m^2+4}} \times \frac{3}{\sqrt{m^2+4}} = \frac{3\sqrt{m^2+3}}{m^2+4} = \frac{3t}{t^2+1}$$

$$\text{令 } m^2+3 = t^2$$

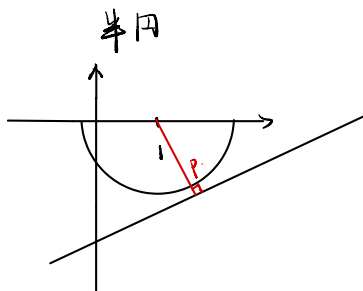
12. 过原点 O 作圆 $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 20 = 0$ 的两条切线, 设切点分别为 P, Q , 则 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} =$ _____;
线段 PQ 的长为 _____.

求切点弦

13. 设点 P 是函数 $y = -\sqrt{4 - (x-1)^2}$ 图象上任意一点, 点 $Q(2a, a-3)$ ($a \in \mathbb{R}$), 则 $|PQ|$ 的最小值为 $\sqrt{5} - 2$.

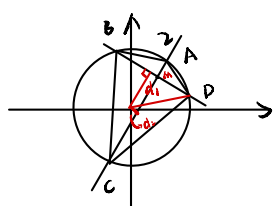
$$y^2 = 4 - (x-1)^2$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 4$$



$$\begin{cases} x = 2a \\ y = a-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2(y+3) \\ x - y - 6 = 0 \end{cases}$$

14. 已知 AC, BD 为圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 的两条相互垂直的弦, 垂足为 $M(1, \sqrt{2})$, 则四边形 $ABCD$ 的面积的最大值为 5 .



$$S = \frac{1}{2} |AC| |BD| = 2\sqrt{4-d_1^2} \cdot \sqrt{4-d_2^2} \leq (4-d_1^2) + (4-d_2^2) = 5$$

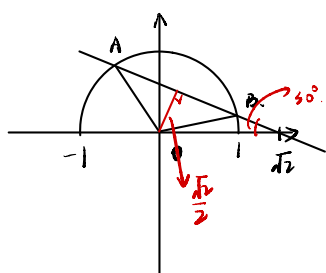
$$|BD| = 2\sqrt{4-d_1^2}$$

$$|AC| = 2\sqrt{4-d_2^2}$$

$$d_1^2 + d_2^2 = OM^2 = 3$$

当且仅当 $4-d_1^2 = 4-d_2^2$ 即 $d_1 = d_2$ 时取等.

15. 过点 $(\sqrt{2}, 0)$ 引直线 l 与曲线 $y = \sqrt{1-x^2}$ 相交于 A, B 两点, O 为坐标原点, 当 $\triangle AOB$ 的面积最大时, 直线 l 的斜率等于 _____.



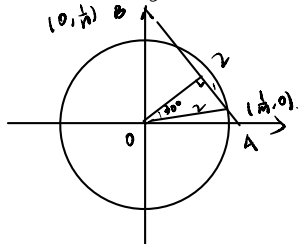
$$S = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \theta \leq \frac{1}{2}$$

$$\theta = 90^\circ \text{ 时}$$





16. (2012·天津) 设 $m, n \in R$, 若直线 $l: mx + ny - 1 = 0$ 与 x 轴相交于点 A , 与 y 轴相交于点 B , 且 l 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 相交所得弦的长为 2, O 为坐标原点, 则 $\triangle AOB$ 面积的最小值为 _____.



$$S = \frac{1}{2} |\frac{1}{m}| |\frac{1}{n}|$$

$$d = \sqrt{3}$$

17. (2023·湖北模拟) 已知点 P 在圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 运动, 若对任意点 P , 在直线 $l: x + y - 4 = 0$ 上均存在两点 A, B , 使得 $\angle APB \geq \frac{\pi}{2}$ 恒成立, 则线段 AB 长度的最小值是 (D).

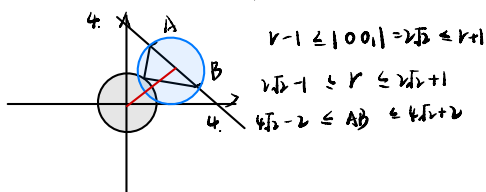
A. $\sqrt{2} - 1$

B. $\sqrt{2} + 1$

C. $2\sqrt{2} - 1$

D. $4\sqrt{2} + 2$

有圆相交.



$$r - 1 \leq |OO_1| = 2\sqrt{2} \leq r + 1$$

$$2\sqrt{2} - 1 \leq r \leq 2\sqrt{2} + 1$$

$$4\sqrt{2} - 2 \leq AB \leq 4\sqrt{2} + 2$$

半径之和 \geq 圆心距 \geq 半径之差

① $x^2 + y^2 = 1$ 始终在以 AB 为直径的圆内或圆上.

18. 已知圆 $M: (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 2$, 点 $A(t, 0)$, 若圆 M 上存在两点 B, C , 使得 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 则实数 t 的取值范围是 (D).

A. $[-3, 1]$

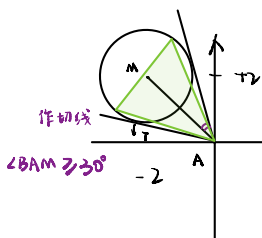
B. $[-5, 1]$

C. $[-3, -1]$

D. $[-4, 0]$



存在点, 即便 $\angle BAM = 30^\circ$



$$\theta \geq 30^\circ$$

$$\sin \theta \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{|MA|} \geq \frac{1}{2}$$

$$(t + 2)^2 + 4 \leq 8 \quad -4 \leq t \leq 0.$$

相切时存在即可.

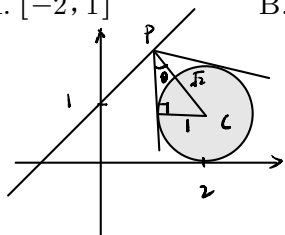
19. 已知点 P 为直线 $l: x - y + 1 = 0$ 上的动点, 若在圆 $C: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$ 上存在两点 M, N , 使得 $\angle MPN = 60^\circ$, 则点 P 的横坐标的取值范围为 (C).

A. $[-2, 1]$

B. $[-1, 3]$

C. $[0, 2]$

D. $[1, 3]$



$$\sin \theta \geq \frac{1}{2}$$

$$|PC| \geq 2$$

$$C(2, 1)$$

$$P(p, p+1)$$

$$(2-p)^2 + p^2 = 4$$

$$4 + p^2 - 4p + p^2 = 4$$

$$p^2 - 2p = 0$$

$$p(p-2) = 0$$

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = 2$$

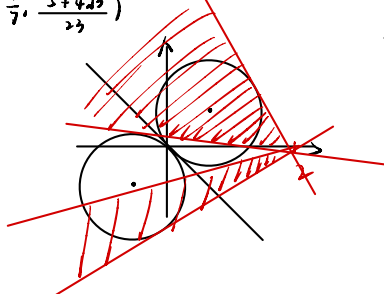
$$\therefore p \in [0, 2]$$

20. 曲线 $C: x^2 + y^2 = |x + y|$ 围成的封闭图形的面积为 $\frac{\pi}{2}$, 若直线 $y = k(x - 2)$ 与 C 恰有两个公共点, 则 k 的取值范围为 $(-1, \frac{5-4\sqrt{2}}{23}) \cup (\frac{1}{7}, \frac{5+4\sqrt{2}}{23})$.

讨论

$$\begin{aligned} x+y &\geq 0, & x^2+y^2 &= x+y. \\ (y \geq -x) & & (x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

的半个平面



过 $(2, 0)$.

$$\begin{aligned} x+y &< 0, & x^2+y^2 &= -x-y. \\ & & (x+\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$



作业

- (2014·大纲版) 直线 l_1 和 l_2 是圆 $x^2+y^2=2$ 的两条切线. 若 l_1 与 l_2 的交点为 $(1, 3)$, 则 l_1 与 l_2 的夹角的正切值等于 _____.
- 设圆 $C: x^2+y^2=3$, 直线 $l: x+3y-6=0$, 点 $P(x_0, y_0) \in l$, 存在点 $Q \in C$, 使 $\angle OPQ = 60^\circ$ (O 为坐标原点), 则 x_0 的取值范围是 ()
 A. $[-\frac{1}{2}, 1]$ B. $[0, 1]$ C. $[0, \frac{6}{5}]$ D. $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$
- 已知圆 C 过点 $(1, 0)$, 且圆心在 x 轴的正半轴上, 直线 $l: y = x - 1$ 被该圆所截得的弦长为 $2\sqrt{2}$, 则圆 C 的标准方程为 _____.
- 过点 $P(1, 1)$ 的直线, 将圆形区域 $\{(x, y) | x^2+y^2 \leq 4\}$ 分为两部分, 使得这两部分的面积之差最大, 则该直线的方程为 ()
 A. $x+y-2=0$ B. $y-1=0$
 C. $x-y=0$ D. $x+3y-4=0$
- 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 A, B 是圆 $x^2+y^2-6x+5=0$ 上的两个动点, 且满足 $|AB|=2\sqrt{3}$, 则 $|\vec{OA} + \vec{OB}|$ 的最小值为 _____.

